

06

Lógica proposicional:
Formas normais ■

Número Imaginário

numeroimaginario
.com
.br

Motivação inicial

Nos vídeos anteriores, vimos que a partir de uma dada fórmula, podemos construir sua tabela verdade (função verdade).

Agora, estamos interessados na recíproca: dada uma tabela verdade, queremos encontrar uma fórmula geradora desta tabela.

Resultado 1: Toda função verdade é a função verdade determinada por uma fórmula restrita.

Lembrete: uma fórmula restrita é uma fórmula que envolve apenas os conectivos $\neg$, & e $\vee$.

Demonstração:

A demonstração do resultado é construtiva, isto é, ela nos fornece um procedimento para construirmos a fórmula restrita associada.

Suponha que temos uma função verdade de n variáveis.

Queremos construir uma fórmula A com n variáveis proposicionais correspondente.

Resultado 1: Toda função verdade é a função verdade determinada por uma fórmula restrita.

Lembrete: uma fórmula restrita é uma fórmula que envolve apenas os conectivos ¬, & e V.

Demonstração:

Se a função verdade assume o valor F para todas as combinações de valores, então a fórmula desejada pode ser esta:

$A = (p_1 \,\&(\neg p_1)) \,\&\, p_2 \,\&\, \ldots \&\, p_n.$

Agora, se a função verdade dada assume o valor V pelo menos para uma atribuição de valores, então fazemos o seguinte (exemplo):

Exemplo 1: Vamos especificar uma função-verdade de três variáveis por meio de uma tabela:

V	V	V	V
V	V	F	V
V	F	V	F
V	F	F	F
F	V	V	F
F	V	F	F
F	F	V	F
F	F	F	V

Queremos uma fórmula de três variáveis proposicionais que possui a tabela verdade ao lado.

V	V	V	V
V	V	F	V
V	F	V	F
V	F	F	F
F	V	V	F
F	V	F	F
F	F	V	F
F	F	F	V

Examinamos as combinações que geram o valor V:

V V V ---- V V F ----- F F F

As seguintes fórmulas geram respectivamente o valor V para essas atribuições:

$(p_1 \,\&\, p_2 \,\&\, p_3)$
$(p_1 \,\&\, p_2 \,\&\, (\neg p_3))$
$((\neg p_1)\&(\neg p_2)\&(\neg p_3))$

Note que qualquer outra atribuição de valores a essas fórmulas as farão obter o valor-verdade F. Portanto, basta as conectarmos com o conectivo ∨ para obtermos a fórmula desejada:

$$(p_1 \,\&\, p_2 \,\&\, p_3) \vee (p_1 \,\&\, p_2 \,\&\, (\neg p_3)) \vee ((\neg p_1)\&(\neg p_2)\&(\neg p_3))$$

Formais normais

$(p_1 \vee p_2) \,\&\, (p_1 \vee (\neg p_2)) \,\&\, ((\neg p_1) \vee (\neg p_2))$

DEFINIÇÃO: Seja Q_{ij} uma variável proposicional ou a negação de uma variável proposicional.

Então dizemos que uma fórmula está na forma normal conjuntiva se ela possui a seguinte forma

$$\left(\bigwedge_{i=1}^{m}\left(\bigvee_{j=1}^{n} Q_{ij}\right)\right),$$

e que está na forma normal disjuntiva se ela possui a seguinte forma

$$\left(\bigvee_{i=1}^{m}\left(\bigwedge_{j=1}^{n} Q_{ij}\right)\right).$$

$(p_1 \,\&\, p_2 \,\&\, p_3) \vee (p_1 \,\&\, p_2 \,\&\, (\neg p_3)) \vee ((\neg p_1)\&(\neg p_2)\&(\neg p_3))$

Consequência direta 1:

Toda fórmula que não é uma contradição é logicamente equivalente a uma fórmula na forma normal disjuntiva.

Demonstração:

Dada uma fórmula A, obtemos a tabela verdade associada (e consequentemente, a função verdade).

Usando o resultado 1, obtemos a fórmula desejada (observe que o método apresentado no resultado 1 nos dá sempre uma fórmula na forma normal disjuntiva.)

Como essas duas fórmulas possuem a mesma tabela verdade, elas são logicamente equivalentes.

Consequência direta 2:

Toda fórmula que não é uma tautologia é equivalente a uma fórmula na forma normal conjuntiva.

Demonstração:

Dada uma fórmula A, se ela não é uma tautologia, então $(\neg A)$ não é uma contradição.

Sendo assim, $(\neg A)$ é equivalente a uma fórmula na forma normal disjuntiva $\mathrm{B} = \left(\bigvee_{i=1}^{m}\left(\bigwedge_{j=1}^{n} Q_{ij}\right)\right)$ (pela conseq. anterior).

Portanto, A é logicamente equivalente a $(\neg B)$.

Mas o que é $(\neg B)$?

a) $\bigvee_{i=1}^{n}(\neg A_i)$ é logicamente equivalente a $\neg(\bigwedge_{i=1}^{n} A_i)$.
b) $\bigwedge_{i=1}^{n}(\neg A_i)$ é logicamente equivalente a $\neg(\bigvee_{i=1}^{n} A_i)$.

Consequência direta 2:

Toda fórmula que não é uma tautologia é equivalente a uma fórmula na forma normal conjuntiva.

Demonstração:

$$\neg \mathrm{B} = \neg\left(\bigvee\left(\bigwedge Q_{ij}\right)\right) = \bigwedge\left(\neg\left(\bigwedge Q_{ij}\right)\right) = \bigwedge\left(\bigvee\left(\neg Q_{ij}\right)\right).$$

Lembrando que algum Q_{ij} pode ter ficado na forma $\neg(\neg q)$, basta trocarmos esta(s) fórmulas por q e obtermos o resultado desejado.

Ou seja, A é logicamente equivalente a $\neg B$, que, por sua vez, está na forma normal conjuntiva.■



06 *Lógica proposicional: Forma normal* ■

numeroimaginario.com.br
vinicius@numeroimaginario.com.br